

ТОЛҚЫН ТЕҢДЕУІ ҮШІН КОШИ ЕСЕБІ. СИПАТТАУЫШТАР ӘДІСІ.  
ЖАЛҒАСТЫРУ ӘДІСІ. ТУРА ЖӘНЕ КЕРІ ТОЛҚЫНДАР.  
ДАЛАМБЕР ФОРМУЛАСЫ. БІРТЕКТІ ЕМЕС ТОЛҚЫН ТЕҢДЕУ  
ҮШІН КОШИ ЕСЕБІ. ДЮАМЕЛЬ ҚАҒИДАСЫ.

## Шәкір Айдос Ғанижанұлы

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

математика кафедрасының аға оқытушысы, PhD

17 қыркүйек 2025  
Алматы, Қазақстан



**Дәрістің мақсаты** – біртекті және біртекті емес толқын теңдеуі үшін қойылған Коши есебін шешу

**Негізгі сұрақтар:**

- 1 Біртекті толқын теңдеуі үшін қойылған Коши есебі. Даламбер Формуласы
- 2 Біртекті емес толқын теңдеуі үшін қойылған Коши есебі. Даламбер Формуласы. Дюамель қағидасы.
- 3 Шешімнің физикалық интерпретациясы



Толқын теңдеуі — тербеліс пен толқындық процестерді сипаттайтын негізгі математикалық модельдердің бірі. Бұл теңдеу серпімді жіптің немесе мембрананың қозғалысын, сондай-ақ дыбыс және жарық толқындарының таралуын сипаттайды.

**Теңдеудің шығу тегі.** Ұзындығы  $L$  болатын біртекті серпімді жіптің қозғалысын қарастырайық.  $u(x, t)$  — жіптің  $x$  нүктесінің  $t$  мезеттегі теңескен күйден ауытқуы болсын. Ньютонның екінші заңы бойынша жіптің кішкене кесіндісі үшін:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

мұндағы

- $\rho$  — жіптің сызықтық тығыздығы (массасы бірлік ұзындыққа),
- $T$  — жіптің керілу күші.

**Толқын теңдеуі.** Жоғарыдағы өрнекті ықшам түрде жазамыз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

мұндағы  $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$  — толқынның таралу жылдамдығы. **Бастапқы және шеттік шарттар.** Бастапқы шарттар:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

мұндағы  $\varphi(x)$  — бастапқы пішін,  $\psi(x)$  — бастапқы жылдамдық.  
Шеттік шарттар (мысалы, бекітілген ұштар үшін):

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0.$$



## Физикалық мағынасы

Теңдеу (1) келесі процестерді сипаттайды:

- серпімді жіптің тербелісі;
- акустикалық толқындардың таралуы;
- электромагниттік толқындар (бір өлшемді жағдайда).

Толқын теңдеуі — екінші ретті гиперболалық типті дербес туындылы теңдеу. Бұл дәрісте біз толқын теңдеуінің Коши есебін қарастырып, оның шешімін **сипаттауыштар әдісімен** табамыз.

### Бір өлшемді толқын теңдеуі

Бір айнымалыдағы (1D) толқын теңдеуі келесідей:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad a > 0,$$

мұндағы:

$u = u(x, t)$  — белгісіз функция (мысалы, ығысу немесе қысым),  $a$  — толқынның таралу жылдамдығы.

### Коши есебі

Бастапқы сәтте  $t = 0$  уақытында келесі шарттар берілсін:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

мұндағы  $\varphi(x)$  — бастапқы ығысу,  $\psi(x)$  — бастапқы жылдамдық.

Біздің мақсат — барлық  $t > 0$  және  $x \in \mathbb{R}$  үшін  $u(x, t)$  функциясын табу.



## Сипаттауыштар әдісі

Толқын теңдеуін шешудің ең тиімді тәсілдерінің бірі — **сипаттауыштар әдісі** (метод характеристик). Бұл әдіс теңдеуді жаңа айнымалылар арқылы қарапайым түрге келтіруге негізделеді.

### Жаңа айнымалылар енгізу

Келесі айнымалыларды енгіземіз:

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at.$$

Бұл айнымалылар — **сипаттауыштар** немесе **толқын бағыттары** деп аталады. Тізбекті туындылар арқылы есептейміз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} = -a \frac{\partial}{\partial \xi} + a \frac{\partial}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Енді екінші ретті туындыларды табамыз:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\ u_{tt} &= a^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}). \end{aligned}$$



### Теңдеуді жаңа айнымалыларда жазу

Толқын теңдеуін  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$  түріне қойып, жоғарыдағы өрнектерді орнына қоямыз:

$$a^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = a^2(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}).$$

Қарапайымдастырсақ:

$$-2u_{\xi\eta} = 2u_{\xi\eta} \Rightarrow u_{\xi\eta} = 0.$$

Осылайша, теңдеу жаңа айнымалыларда қарапайым түрде жазылады:

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

### Жалпы шешім

Теңдеу  $u_{\xi\eta} = 0$  болғандықтан,  $u$  функциясы  $\xi$  және  $\eta$  бойынша **бөлек функциялардың қосындысы** түрінде жазылады:

$$u(x, t) = f(\xi) + g(\eta),$$

немесе бастапқы айнымалыларға қайта жазсақ:

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at),$$

мұндағы  $f$  және  $g$  — еркін екі рет дифференциалданатын функциялар. Бұл — **Д'Аламбер шешімі**.



### Бастапқы шарттарды қолдану

Коши шарттарын пайдаланып,  $f$  және  $g$  функцияларын табамыз.

**Бірінші шарт:**  $u(x, 0) = \varphi(x)$

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) = \varphi(x).$$

**Екінші шарт:**  $u_t(x, 0) = \psi(x)$  Алдымен  $u_t$  табамыз:

$$u_t = -af'(x - at) + ag'(x + at).$$

$t = 0$  кезінде:

$$u_t(x, 0) = -af'(x) + ag'(x) = \psi(x).$$

Осы екі шарттан:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ -af'(x) + ag'(x) = \psi(x). \end{cases}$$

Екінші теңдеуді  $x$  бойынша интегралдаймыз:

$$-af(x) + ag(x) = \int_0^x \psi(s) ds + C.$$

Сызықтық жүйені  $f$  және  $g$  бойынша шешеміз:

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[ \varphi(x) - \frac{1}{a} \int_0^x \psi(s) ds \right] + C_1,$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \left[ \varphi(x) + \frac{1}{a} \int_0^x \psi(s) ds \right] + C_2.$$

Константаларды нөл деп алуға болады.



## Д'Аламбер формуласын шығару

$f$  және  $g$ -ны бастапқы айнымалыларға қайта қойсақ:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds.$$

Бұл — **Д'Аламбер формуласы**, бір өлшемді толқын теңдеуінің Коши есебінің жалпы шешімі.

### Физикалық мағынасы

- $\varphi(x - at)$  — оң бағытта  $a$  жылдамдықпен таралатын толқын;
- $\varphi(x + at)$  — сол бағытта  $a$  жылдамдықпен таралатын толқын;
- Интегралдық мүше  $\psi(s)$  бастапқы жылдамдықтың әсерін сипаттайды.

Сондықтан жалпы шешім екі бағытта қозғалатын толқындардың қосындысы болып табылады.





## Сипаттауыштар әдісінің мәні

Сипаттауыштар әдісінің басты идеясы — теңдеудің сипаттауыштарын анықтап, айнымалыларды олардың бойымен түрлендіру. Сипаттауыштар бойында туындыны есептеу қарапайым түрге келеді, сондықтан шешімді аналитикалық табуға мүмкіндік туады.

Толқын теңдеуі үшін сипаттауыштар — түзу сызықтар:

$$x - at = \text{const}, \quad x + at = \text{const}.$$

Бұл түзулер толқынның таралу бағытын бейнелейді.

Енді толқын теңдеуін сыртқы әсермен қарастырайық:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

мұндағы  $f(x, t)$  — берілген сыртқы күш өрісі.

Бұл жағдайда Коши есебі:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$



## Дюамель қағидасының мазмұны

Дюамель қағидасы (принципі) келесідей тұжырымдалады:

> Егер  $f(x, t)$  күш өрісінің әсерімен  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$  толқын теңдеуі берілсе, онда оның шешімі **еркін жүйенің** ( $f = 0$ ) Коши есебінің шешімін пайдалану арқылы табылады.

Басқаша айтқанда,  $f(x, t)$  күш өрісінің әсерін уақыт бойынша интегралдау арқылы ескереміз.

Толық шешімді екі бөлікке бөлеміз:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

мұндағы:

- $v(x, t)$  — еркін толқын теңдеуінің шешімі ( $f = 0$ ),
- $w(x, t)$  — сыртқы күштің әсерінен туындайтын қосымша бөлік.

## Еркін шешім

$v(x, t)$  мына теңдеуді қанағаттандырады:

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad v(x, 0) = \varphi(x), \quad v_t(x, 0) = \psi(x).$$

Оның шешімі белгілі:

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds.$$



**Күш өрісі әсерінен туындайтын бөлік**

Енді  $w(x, t)$  функциясын қарастырайық:

$$w_{tt} = a^2 w_{xx} + f(x, t),$$

ал бастапқы шарттар нөлдік:

$$w(x, 0) = 0, \quad w_t(x, 0) = 0.$$

**Дюамель формуласын шығару**

Кез келген тұрақты  $\tau$  үшін келесі **локалды Коши есебін** қарастырамыз:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \\ v(x, \tau) = 0, \\ v_t(x, \tau) = f(x, \tau), \end{cases}$$

бұл есептің шешімі Д'Аламбер формуласы бойынша:

$$v(x, t; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds, \quad t > \tau.$$

$w(x, t)$  — бұл  $\tau$  уақытындағы осындай шешімдердің барлық жиынтығының суперпозициясы, яғни:

$$w(x, t) = \int_0^t v(x, t; \tau) d\tau = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau.$$



## Толық шешім

Осылайша, бастапқы Коши есебінің толық шешімі:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau.$$

Бұл — **Дюамель формуласы**.

### Физикалық түсіндірме

Дюамель қағидасы мынаны көрсетеді:

- Егер жүйеге уақыт бойынша өзгеретін  $f(x, t)$  күш өрісі әсер етсе, онда әрбір сәтте  $\tau$  кезінде пайда болатын әсер толқын түрінде таралады;
- Толық шешім — барлық осы «кішкентай» толқындардың (әсерлердің) уақыт бойынша интегралдық қосындысы;
- $f(x, t)$  нөлге тең болған жағдайда, формула Д'Аламбер шешіміне келіп тіреледі.



## Қорытынды

Дюамель қағидасы толқындық, жылулық және диффузиялық теңдеулер үшін әмбебап әдіс болып табылады. Ол **жүйеге сыртқы әсер болған жағдайда** аналитикалық шешімді еркін жүйенің шешімі арқылы өрнектеуге мүмкіндік береді.

Формула:

$$u(x, t) = \text{еркін шешім} + \text{күш өрісінің интегралдық әсері}$$

механика, акустика, электродинамика және инженерлік есептерде жиі қолданылады.

Толқын теңдеуі үшін Коши есебі сипаттауыштар әдісі арқылы оңай шешіледі.

Нәтижесінде алынған Д'Аламбер формуласы толқынның таралу, шағылу және интерференция құбылыстарын түсіндірудің математикалық негізін береді. Бұл әдіс екі және үш өлшемді жағдайларға да жалпыланып, математикалық физиканың негізгі есептерінде кең қолданылады.



## Қосымша ақпарат

Студенттерге қосымша әрі толыққанды мәліметтер алу үшін [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] әдебиеттер ұсынылады.



Токибетов Ж.А., Хайруллин Е.М.

Математикалық физика теңдеулері. Астана, 2010 ж.



Михлин С.Г.

Курс математической физики. М., 1968.



Владимиров В.С.

Уравнения математической физики. М., 1984.



Орынбасаров М.О., Оршубеков Н.Ә.

Математикалық физика теңдеулері. Алматы, 2009 ж.



Орынбасаров М.О., Сахаев Ш.С.

Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы. Алматы, 2009 ж.



Тихонов А.Н., Самарский А.А.

Уравнения математической физики. М., 2006.



Хомпыш Х.

Математикалық физика теңдеулері. Алматы, Қазақ Университеті, 2017 ж. 215 б.



НАЗАРЛАРЫҢЫЗҒА  
РАҚМЕТ!

